

Kombinatorika a grafy I

4. série.

Zadáno: 7. 5. 2012

Termín pro bonus: 21. 5. 2012 12:20

Řešení příkladů pište **čitelně** nebo elektronicky (prosím o PDF nebo plaintext).

Jasně vysvětlete svůj postup a jmenujte použité věty. Postup je důležitější, než správný výsledek, za samotný výsledek je 0 bodů. Pokud by výsledek měl být velké číslo, můžete být lepší zápis s mocninami, komb. čísly a pod., než vyčíslená hodnota.

V případě nejasností v zadání se ozvěte.

Příklad 1 [4 body]

Jak se změní počet koster grafu G s n vrcholy a m hranami, pokud podrozdělíme každou hranu jedním vrcholem (z každé hrany vznikne cesta o dvou hranách, získáme tedy graf H s $n + m$ vrcholy a $2m$ hranami)?

Hinty: Najděte korespondenci každé (jediné) kostry v G se skupinou odvozených koster v H . Kolik hran bude v každé z koster G ?

Příklad 2a [2 body]

Buď G_1 a G_2 souvislé grafy a H graf vzniklý z těchto dvou spojením za vrchol (vezmeme libovolný vrchol v_1 z G_1 , libovolný vrchol v_2 z G_2 a sjednotíme je, vznikne souvislý H s vrcholem v , který je artikulace).

Vyjádřete počet koster $\kappa(H)$ pomocí $\kappa(G_1)$ a $\kappa(G_2)$.

Příklad 2b [1 bod]

Jaký je počet koster grafu vzniklého slepením cyklů C_n a C_m za vrchol?

Příklad 3 [2 body]

Hrany úplného grafu na $n \geq 2$ vrcholech jsou obarveny dvěma barvami (červeně a modře). Ukažte, že v grafu existuje jednobarevná kostra.

Příklad 4 [2 body]

Hrany grafu K_7 jsou obarveny červeně a modře. Dokažte, že pro libovolné obarvení v tomto grafu najdeme buď modrou K_3 nebo červenou cestu na třech vrcholech (ne nutně indukovanou; pozor na to, že K_3 není cesta na třech vrcholech).

Příklad 5a [2 body]

Vyvraťte nebo dokažte: Pro každé obarvení množiny mřížových bodů v rovině (bodů s celočíselnými souřadnicemi) pomocí 42 barev existuje množina 42 celých čísel X taková, že všechny prvky $X \times X$ jsou obarveny stejnou barvou. Kartézský součin je definován jako $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$.

Příklad 5b [3 body]

Vyvráťte nebo dokažte: Pro každé obarvení množiny mřížových bodů v rovině (bodů s celočíselnými souřadnicemi) pomocí 42 barev existují množiny 42 celých čísel X a Y takové, že všechny prvky $X \times Y$ jsou obarveny stejnou barvou.