Projektivní prostory a geometrie

Motivace: renesance, Leone Battista Alberti (1404–1472)

metoda kreslení na sklo s pevnou polohou skla a oka.

projekce $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ (ne tak docela)

zachovává: body, přímky, průsečíky.

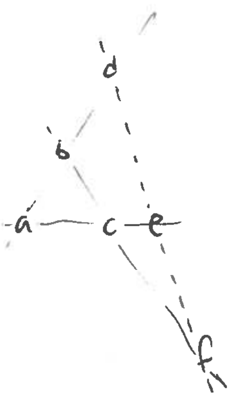
nezachovává: rovnoběžnost, délku, úhly, plochu.

Alberti: Jaké všechny <u>invarianty</u> projekce zachovává?

Příklad: Konstrukce $P(\mathbb{R},2)$ z 1-dim podprostorů a 2-dim. podprostorů $\mathbb{R}^3$

Příklad/konstrukce: $P(\mathbb{F},d)$ z 1- a 2-dim podprostorů $\mathbb{F}^{d+1}$, i pro konečná $\mathbb{F}$

Projektivní prostory axiomaticky



Proj. prostor: $(P,\mathcal{L})$ <u>Whiteheadovy axiomy</u>:

A1) $\forall a,b,\ a\neq b\ \exists!\ L \ni a,b$

A2) ~~trojúhelník~~ $\forall a,b,c$ nekolin., $\forall d\in ab, \forall e\in ac$ $\exists f\in bc\cap de$

A3) $\forall L\in\mathcal{L},\ |L|\geq 3$

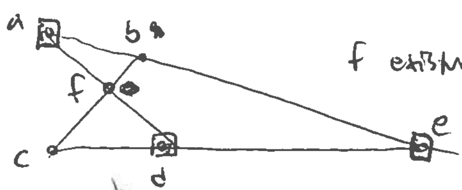
Konečné navíc: $|P|<\omega$

Notace:
- $a,b,c\ldots$ body
- $K,L,M\ldots$ přímky
- $S,T,U\ldots$ podprostory
- $ab, cd\ldots$ přímky
- $A,B,C\ldots$ podmnožiny P

Pozn: A3 např. zakazuje disj. spojení dvou prostorů 2-bodovými přímkami

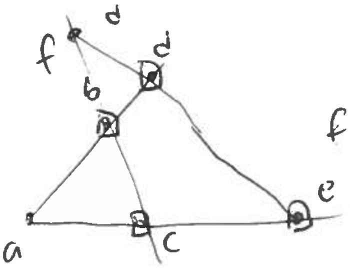
Alternativa: A2') (Veblen) $\forall a,b,c,d$ různé, $ab\cap cd\neq\emptyset \Rightarrow ac\cap bd\neq\emptyset$

$D_{A2\Rightarrow A2'}$



f existuje díky A2[a,d,e]

$D_{A2'\Rightarrow A2}$

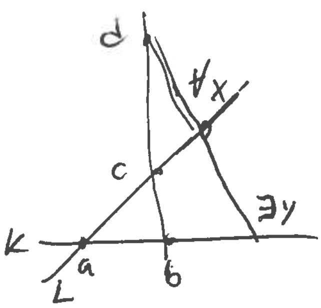


f existuje díky A2'[b,a,d,e]

Počet průsečíků: L: $\forall K, L, K \neq L : |K \cap L| \leq 1$

D: $↯\ \exists K, L, x, y, x \neq y : x, y \in K \cap L$, potom $xy = K = L$, spor.

Konečná odbočka: L: $\forall K, L : |K| = |L|$



L': $\forall K, L, K \cap L \neq \emptyset : |K| = |L|$

D': vezmeme $a = K \cap L$, lib. jiné $b \in K, c \in L, d \in bc$

pak $\forall x \in K, x \neq a, b : \exists y \in K \cap dx, y \neq b, y \neq a$,

tato y jsou různá pro různá $x \Rightarrow |K| \geq |L|$, obdobně opačně

Podprostor: $S \subseteq P$ podprostor $P \equiv \forall x, y \in S : xy \subseteq S$

Uzávěr: pro $A \subseteq P$: $\langle A \rangle$ nejmenší podprostor s $\langle A \rangle \supseteq A$

Průnik: L: průnik podprostorů je podprostor (i libovolně mnoha podpr.)

D: je uzavřený

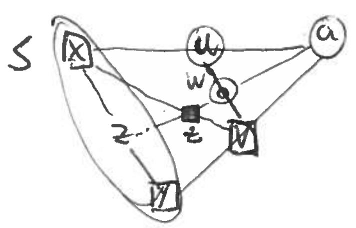
Důsledek: $\langle A \rangle$ je dobře definovaný jako průnik všech podp. $S \supseteq A$

Lemma o přidání bodu

L: $\langle S \cup \{a\} \rangle = \bigcup_{x \in S} ax$ pro S podprostor

D: $\bigcup_{x \in S} ax \subseteq \langle S \cup \{a\} \rangle$ zřejmě. $\bigcup_{x \in S} ax$ je uzavřený:

uvažme $w \in uv, u \in ax, v \in ay$, ukážeme $\exists z \in xy \subseteq S$, že $w \in za$



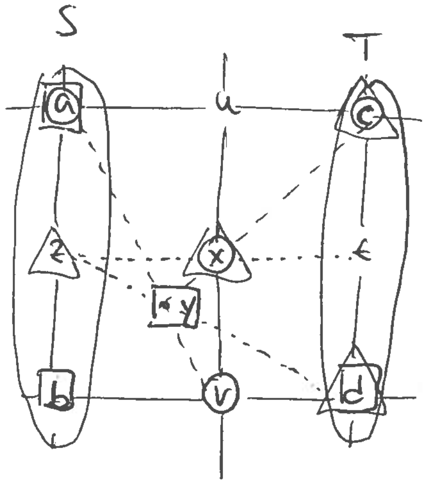
1) díky $A2[a, u, w]$ $\exists\ t = xv \cap wa$

2) díky $A2[x, y, v]$ $\exists\ z = xy \cap at = wa$

Obal sjednocení: L: $\langle S \cup T \rangle = \bigcup_{\substack{x \in S \\ y \in T}} xy$ pro S, T podprostory

D: opět jasně $\bigcup_{\substack{x \in S \\ y \in T}} xy \subseteq \langle S \cup T \rangle$, buď $x \in uv$, $u \in ac$, $v \in bd$,

$a, b \in S$, $c, d \in T$, ukážeme $\exists z \in S, t \in T$, že $x \in zt \in \bigcup_{\substack{x' \in S \\ y' \in T}} x'y'$



1) z $A2'[a,c,x,v]$ $\exists\ y = cx \cap av$

2) z $A2'[a,b,d,y]$ $\exists\ z = dy \cap ab$

3) z $A2'[z,x,c,d]$ $\exists\ t = zx \cap cd$

a tedy $x \in zt$

Nezávislost: Def: $A \subseteq P$ je nezávislá (projektivně) $\equiv \forall a \in A: \langle A \rangle \neq \langle A - \{a\} \rangle$

Rozšiřování: L: A nezávislá, $b \notin \langle A \rangle \Rightarrow A \cup \{b\}$ nezávislá

D: Pokud $\exists\, a \in A$, že $\langle A \cup \{b\} \rangle = \langle A \cup \{b\} \setminus \{a\} \rangle$ a tedy

$a \in bx$ pro $x \in \langle A \setminus \{a\} \rangle$, ale pak $b \in ax \subseteq \langle A \setminus \{a\} \cup \{a\} \rangle = \langle A \rangle$

O výměně: L: A, B proj. nez., $|A| < |B| \Rightarrow \exists\, b \in B: A \cup \{b\}$ proj. nez.

D: $A = \emptyset$ a $A \subsetneq B$ jasné, indukcí podle $|A|$

$A = A' \cup \{a\}$, $a \notin B$, pak z Ind. $\exists\, b \in B$, $b \notin A'$, že $A' \cup \{b\}$ nezávislá

pokud $b \notin \langle A \rangle$, ok

pokud $b \in \langle A \rangle$, pak $A'' = A' \cup \{b\}$ a z Ind. pro (A'', B)

mám $c \in B$, $c \notin A''$, $A'' \cup \{c\}$ proj. nez.

zároveň $\langle A'' \rangle = \langle A \rangle$, protože $b \in ax$, $x \in \langle A' \rangle$

Báze: Def: A je Báze $S \subseteq P$, pokud A nez. a $\langle A \rangle = S$

Důsledek: báze existují a mají stejnou velikost

Dimenze: Def: Dimenze $\dim_P S = |\text{báze } S| - 1$

Obal nezávislých: L: $B \cup C$ proj. nez. $\Rightarrow \langle B \rangle \cap \langle C \rangle = \emptyset$

D: indukce dle $|B|$, $|B|=1$ viz výše

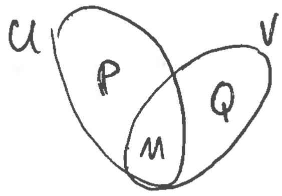
$\lightning$: pokud $\langle B \rangle \cap \langle C \rangle \neq \emptyset$, buď $B' = B \setminus \{b\}$, z Ind

$\langle B' \rangle \cap \langle C \rangle = \emptyset$, $\langle B \rangle = \bigcup_{x \in \langle B' \rangle} xb$, z ($\lightning$) $\exists\, y \in \langle C \rangle$, $y \in xb$ pro něž x.

$x \neq y$ a tedy $b \in \langle B' \cup C \rangle$ a $B \cup C$ není nez.

Dimenze průniku: L: $\dim_p U + \dim_p V = \dim_p \langle U \cup V \rangle + \dim_p \langle U \cap V \rangle$

D: buď M báze $\langle U \cap V \rangle$, $M \cup P$ báze U, $M \cup Q$ báze V



($\exists$ díky rozšiřování/výměně)

potřebujeme $P \cup Q \cup M$ jsou proj. nez.

$P = \{p_1 .. p_r\}$, postupně uvažujeme $(Q \cup M \cup \{p_1 .. p_i\})$

pokud $\exists i$ (nejmenší), že $Q \cup M \cup \{p_1 .. p_i\}$ je záv., pak

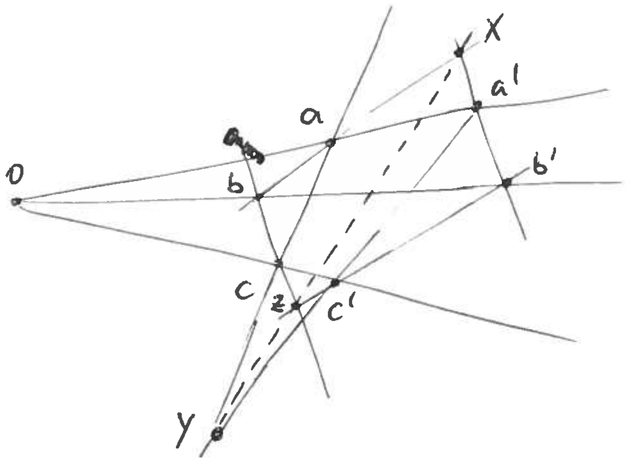
$p_i \in pq$, $p \in \langle p_1 .. p_{i-1} \rangle$, $q \in V$, ale tedy $q \in \langle P \rangle$ a $q \in \langle M \rangle$.

tedy $p_i \in \langle M \cup \{p_1 .. p_{i-1}\} \rangle$, spor s P proj. nez. $\lightning$

Desargues (axiom):

o, a, b, c ~~O, A, B, C~~ nekolineární po 3, $a' \in oa$, $b' \in ob$, $c' \in oc$,

potom $x = ab \cap a'b'$, $y = ac \cap a'c'$, $z = bc \cap b'c'$ jsou kolineární:



Duální projektivní prostory

Duální prostor

Buď $\mathbb{P}=(P,L)$, $\dim \mathbb{P}=n\geq 2$

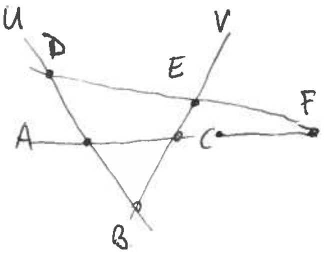
Duál $\mathbb{P}$, též $\mathbb{P}^*=(P',L')$ je def.:

$P'=\{U\subseteq P \mid \dim U=n-1, U \text{ podprostor}\}$

$L'=\{L'_U \mid U\subseteq P, \dim U=n-2, U \text{ podprostor}\}$

kde $L'_U=\{p'\in P' \mid U\subseteq p'\}$

Duál je prostor



V: $\mathbb{P}^*$ je projektivní prostor

D: (A1): $\forall A\neq B\in P'$: $\dim A+\dim B=n-2=\dim A+B+\dim A\cap B$

$\dim A+B=n$, tedy $\dim A\cap B=n-2$ a je unikátní

(A2): "$\forall A,B,C\in P'$ nekolin., $\forall D\supseteq A\cap B$, $\forall E\supseteq B\cap C$: $\exists F\in P'$:

$F\supseteq D\cap E \wedge F\supseteq A\cap C$"

D: $\dim U\cap V=\dim U+\dim V-\dim U+V=n-3$

$\underset{\dim=n-2}{A\cap C}\supseteq \underset{\dim=n-3}{U\cap V}$ tedy $\exists f\in P$, že $A\cap C=\langle (U\cap V)\cup\{f\}\rangle$

$D\cap E\supseteq U\cap V$ tedy $\exists f'\in P$, že $D\cap E=\langle U\cap V\cup\{f'\}\rangle$

a tedy pro $F=\langle (U\cap V)\cup\{f,f'\}\rangle$ máme $\dim F=n-1$

(A3): pro $\dim U=n-2$ máme $\exists a,b\in P$: $\langle U\cup\{a,b\}\rangle=P$ ale $ab\cap U=\emptyset$,

tedy $\exists c\in ab$, a U_a, U_b, U_c jsou různé nadroviny nad U.

Duál podprostoru

Def: $S^*=\{A\in P' \mid S\subseteq A\}$ pro $S\subseteq P$ podprostor

Potom: S^* je podprostor (uzavřený), $\emptyset^*=P'$, $P^*=\emptyset$,

$A^*=\{A\}$ pro $A\in P'$

L: $(S+T)^*=S^*\cap T^*$, $(S\cap T)^*=S^*+T^*$

D: Cv (nebo Kratochvílovy poznámky)

Projektivní a afinní roviny

Projektivní rovina $(P, \mathcal{L})$ taková, že:

(PP1): $\forall a,b \in P \; \exists! L \ni a,b$

(PP2): $\forall L, M \; \exists a \in P : a \in L \cap M$

(PP3): $\exists a,b,c,d$, každé 3 nekolineární

Ekvivalence

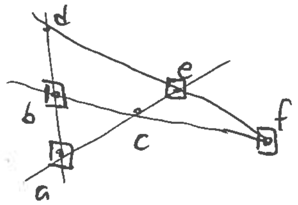
V: $(P, \mathcal{L})$ je projektivní rovina $\iff$ $(P, \mathcal{L})$ je projektivní prostor $\dim = 2$

D$_{\Rightarrow}$ (A1) triv., (A2) triv. (vše se protíná), (A3) triv z PP3 pro $\overline{ab}$, pak #bodů

$(\dim \geq 2)$ z (PP3), $(\dim \leq 2)$: 4 nezávislé body by porušily (PP2)

D$_{\Leftarrow}$ (PP1) triv., (PP2): 2 přímky by znamenaly $\dim \geq 3$,

(PP3):



použiju (A2) na nekolin. a,b,c, které existují díky $(\dim \geq 2)$, vyberu $\{a,b,e,f\}$

Afinní rovina $(P, \mathcal{L})$ splňující:

(AP1): $\forall a,b \in P \; \exists! L \ni a,b$

(AP2): $\forall L \in \mathcal{L}, \forall a \notin L \; \exists! M \ni a,\; M \cap L = \emptyset$

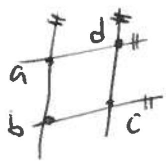
(AP3): $\exists a,b,c$ nekolineární

Rovnoběžnost Def: k, l rovnoběžné $\equiv k \cap l = \emptyset$ nebo $k = l$

Rovnoběžnost je relace ekvivalence

Z afinní do projektivní: Do afinní $(P, \mathcal{L})$ přidám bod za každou třídu rovnoběžnosti, ten do každé přímky tím směrem, navíc přímku přes nové body.

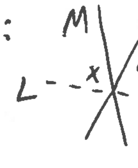
D: (PP1) a (PP2) přímo, (PP3):



průsečík d neleží na ab, bc ani ac

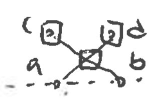
Z projektivní do afinní: Z projektivní $(P, \mathcal{L})$ odeberu lib. přímku L i s jejími body. D: (AP1) triv.

(AP2):



unikátnost $x \in M \cap L \Rightarrow$ unikátnost N

(AP3) pokud $a,b \in L$:

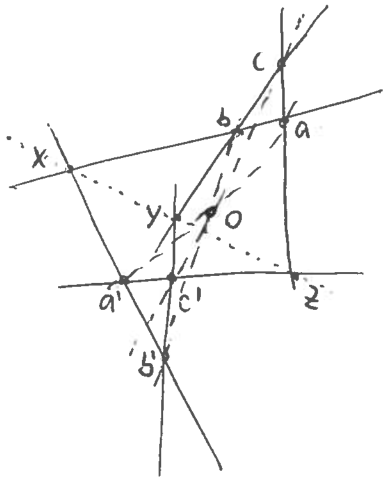


□

Desargův axiom a proj. roviny

Desargův axiom: (DA) $\forall a,b,c,a',b',c' \in P$, abc nekolin., $a'b'c'$ nekolin.; $\exists o$, že oaa', obb', occ' jsou kolin.

$x := ab \cap a'b'$, $y := bc \cap b'c'$, $z := ac \cap a'c'$
pak jsou xyz kolineární.



Pro $P(\mathbb{F},d)$ platí: V: Desargův axiom platí v $P(\mathbb{F},d)$

D: Pomocí souřadnic / reprezentativních vektorů.

Viz např.: Nigel Hitchin: Projective geometry ("b3 course 2003", online PDF) [Sec 2.3, 14–15]

Ne-Desargovské roviny: Všechny kon. proj. roviny řádu ≤ 8 jsou Desarguovské, ale existují neDesarguovské proj. roviny řádu 9 (a více)

Moulton plane: Afinní rovina, kde body jsou $\mathbb{R}^2$, "přímky" jsou 2 typů:

- "rostoucí" přímky jsou eukleidovské přímky
- "klesající" přímky typu $y = \begin{cases} ax+b & \text{pro } x \leq 0 \\ 2ax+b & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$, $a \leq 0$

Zúplnění na proj. rovinu zahrnuje std. třídy paralelních "přímek".

Pozdější látka: V: Každý Desargovský prostor je koordinatelný, tedy isomorfní $P(\mathbb{F},d)$ pro nějaké $\mathbb{F}$ a $d \in \{0,1,2,\dots\} \cup \{\infty\}$

V: Proj. prostor s dim $\neq 2$ je Desarguovský